

Korrelationsanalyse bei Schwingungsmodellen

J. vom Scheidt, H. Weiß

Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz, Germany

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Schwingungsprobleme mit zufälliger Erregung betrachtet. Es werden asymptotische Entwicklungen der Korrelationsfunktion angegeben, wenn der stochastische Eingangsprozess schwach stationär ist und als Integralfunktional schwach korrelierter Funktionen modelliert wird. Insbesondere wird der Fall behandelt, wenn sowohl Ableitungen des Eingangsprozesses vorkommen, als auch Ableitungen der Lösung von Interesse sind.

Schlagerworte: asymptotische Entwicklung, zufällige Schwingungen, schwach korrelierter Prozess

MSC2000 Klassifikation: 70L05, 34F05, 60G12

1 Einleitung

Ein großer Problemkreis in Wirtschaft, Natur und Technik beschäftigt sich mit der Dynamik von Strukturen, d.h. mit zeitlich veränderlichem Verhalten. Beispiele sind Schwingungen diskreter bzw. kontinuierlicher Systeme, Wellenausbreitung oder Wärmeleitung. Besonderes Interesse gilt dabei zufälligen Einflüssen, z.B. stochastische Größen für Materialeigenschaften, die aufgrund von Schwankungen beim Herstellungsprozess nicht im gesamten Gebiet identisch sind, oder eine Fahrbahnoberfläche, die von einem Fahrzeug überrollt wird, bzw. Lasten auf Bauteile oder Bauwerke, die deterministisch nicht genau beschrieben werden können, da sie nicht vorhersehbar sind.

Die Behandlung solcher Aufgabenstellungen gliedert sich im wesentlichen in zwei Aspekte: Zum Ersten die Modellierung der zufälligen Einflüsse als stochastische Prozesse und zum Zweiten die Untersuchung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Verhaltens der gesuchten Größen. Das Vorgehen in dieser Arbeit beruht auf der Theorie dynamischer Probleme im deterministischen Fall und der Anwendung der stochastischen Analysis. Als Methode findet die Korrelationsanalyse der Systemausgänge Verwendung, wenn die zufälligen Parameter mittels schwach korrelierter Funktionen modelliert werden.

Die zu untersuchenden Aufgaben stellen i.a. Randanfangswertprobleme für eine orts-, zeit- und zufallsabhängige Funktion dar. Die zufälligen Einflüsse sollen bezüglich der Zeit stationär sein, d.h. die Charakteristiken sind invariant gegenüber Zeitverschiebung. Durch Diskretisierung mittels FDM/FEM bezüglich der Ortskoordinaten entstehen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, wie sie z.B. bei diskreten oder diskretisierten Schwingungsmodellen auftreten:

$$M\ddot{p} + B\dot{p} + Kp = \hat{g}(t, \omega).$$

Dabei sind M, B und K Matrizen, die bei Schwingungssystemen die Bedeutungen M - Massenmatrix, B - Dämpfungsmatrix und K - Steifigkeitsmatrix haben. p ist die gesuchte zufällige Vektorfunktion und die rechte Seite $\hat{g}(t, \omega)$ entspricht der Erregung des Schwingungssystems. Anfangswertprobleme 2. Ordnung werden mittels

$$z = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ p \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -M^{-1}B & -M^{-1}K \\ I & O \end{pmatrix}$$

in den allgemeinen Fall eines Systems 1. Ordnung

$$\dot{z} = Az + g(t, \omega) \tag{1.1}$$

umgewandelt. Insbesondere soll der Fall

$$g(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} P_k f^{(k)}(t, \omega) \tag{1.2}$$

behandelt werden, d.h. in die rechte Seite gehen Ableitungen eines zufälligen Vektorprozesses $f(t, \omega)$ ein. Die Zahl \bar{k}_f bezeichnet den Grad der höchsten eingehenden Ableitung.

Der Fall $\bar{k}_f = 2$ tritt zum Beispiel auf, wenn ein Fahrzeug modelliert wird, welches eine zufällige Straßenoberfläche überrollt: $f(t, \omega)$ modelliert die Straßenoberfläche in Fahrspuren und die eingehende Kraft ist bei konstanter Fahrgeschwindigkeit proportional zur 2. Ableitung von f nach der Zeit (vgl. [2], [3], [4]). Dabei ist zu beachten, dass die Funktion f mit ihren Eigenschaften (z.B. Spektraldichte) der vorgegeben Anwendung angepasst wird.

2 Stochastische Grundlagen

In dieser Arbeit werden asymptotische Entwicklungen von Korrelationsfunktionen von vektorwertigen Zufallsprozessen betrachtet, die sich als Integralfunktionale

$$f(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds \quad (2.1)$$

von ε -korrelierten Funktionen darstellen lassen, wobei Q eine deterministische, komplexwertige $m \times n$ -Matrixfunktion und $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ eine Familie von schwach stationären n -dimensionalen ε -korrelierten Zufallsprozessen ist.

Bemerkung 2.1 Die in der Einleitung motivierten Anwendungen führen im Allgemeinen zu reellwertigen Systemen (1.1). Effektive Berechnungsmethoden und Reduktionsverfahren (vgl. [2],[8],[9]) erfolgen jedoch an komplexwertigen Ersatzsystemen. Aus diesem Grund wird vom allgemeineren, komplexwertigen Fall ausgegangen.

2.1 ε -korrelierte Funktionen

Definition 2.2

Ein stochastischer Prozess ${}^\varepsilon f(t, \omega)$ mit $t \in D \subset \mathbb{R}$ und Werten im \mathbb{C}^n heißt ε -korreliert mit der Korrelationslänge $\varepsilon > 0$, wenn

$$R_{{}^\varepsilon f}(t, s) := \mathbf{E} \{ [{}^\varepsilon f(t) - \mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) \}] [{}^\varepsilon f(s) - \mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(s) \}]^* \} = 0_{n \times n} \quad \forall t, s \in D \text{ mit } |t-s| \geq \varepsilon$$

gilt. Hierbei bezeichnet $0_{n \times n}$ die $n \times n$ -Nullmatrix. A^* kennzeichnet die zu A transponierte Matrix mit konjugiert komplexen Einträgen.

Von Interesse sind Entwicklungen bezüglich ε . Für Familien ε -korrelierter Prozesse wird folgende Annahme vereinbart, die ohne besonderen Vermerk im Weiteren gelten soll.

Annahme 2.3

1. Die Zufallsfunktionen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind zentriert, d.h. $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f \} = 0$.
2. Die Funktionen $({}^\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind schwach stationäre Prozesse mit den Korrelationsfunktionen $\mathbf{E} \{ {}^\varepsilon f(t) {}^\varepsilon f^*(s) \} = R_{{}^\varepsilon f}(t-s)$, wobei

3. für die Korrelationsfunktionen $(R_{\varepsilon f \varepsilon f})_{\varepsilon > 0}$ eine Darstellung durch eine Korrelationsfunktion R eines 1-korrelierten, schwach stationären Prozesses existiert mit

$$R_{\varepsilon f \varepsilon f}(s) = R\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad \text{und}$$

4. die Funktionen $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ sind pfadweise f.s. und im quadratischen Mittel stetig.

Definition 2.4

Sei $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ eine Familie ε -korrelierter Prozesse mit der Korrelationsfunktion $R(\tau)$ des 1-korrelierten Prozesses. Für $j = 0, 1, 2, \dots$ heißen die komplexwertigen Matrizen

$$\mu_j = \int_{-1}^1 u^j R(u) du \quad \text{bzw.}$$

$$\nu_j = \int_{-1}^1 |u|^j R(u) du$$

Korrelationsmoment bzw. absolutes Korrelationsmoment der Ordnung j . μ_0 wird auch als Intensität von $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ bezeichnet.

Setzt man weiterhin

$$\kappa_j = \int_0^1 u^j R(u) du,$$

so folgt für die Korrelationsmomente

$$\mu_j = \kappa_j + (-1)^j \kappa_j^* \quad \text{und} \quad \nu_j = \kappa_j + \kappa_j^*.$$

2.2 Entwicklung der Korrelationsfunktion

Es werden erste und zweite Momente von Integralfunktionalen $f(t, \omega)$ (vgl. (2.1)) betrachtet. Wegen Annahme 2.3 ist der Prozess f zentriert, d.h. $\mathbf{E}\{f\} = 0$.

Die Kernfunktion Q des Integralfunktional (2.1) erfülle für eine natürliche Zahl $N \geq 0$ folgende Bedingungen:

Annahme 2.5

- Q ist für $N \geq 2$ $(N-1)$ -mal stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$,
- $Q^{(N)}$ existiert stückweise als absolut stetige Funktion auf $[0, \infty)$ und
- $Q^{(k)} \in L^1([0, \infty)) \cap L^2([0, \infty))$, $k = 0, \dots, N+1$.

Definition 2.6

Die Menge aller Funktionen auf $[0, \infty)$, die Annahme 2.5 erfüllen, sei mit \mathfrak{G}^N bezeichnet:

$$\mathfrak{G}^N := \{Q : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^{m \times n}, Q \text{ erfüllt Annahme 2.5}\}.$$

Bemerkung 2.7 $Q \in \mathfrak{G}^N$ wird sich als hinreichende Bedingung für eine „zulässige“ Kernfunktion bei Entwicklung der Korrelationsfunktion des Integralfunktionals bis zur Ordnung N erweisen.

Nach [5] (siehe auch [7]) hat folgender Satz Gültigkeit:

Satz 2.8

Sei $(\varepsilon f)_{\varepsilon > 0}$ eine Familie ε -korrelierter Prozesse und sei $Q \in \mathfrak{G}^N$. Dann gilt für das Integralfunktional (2.1) folgende asymptotische Entwicklung der Korrelationsfunktion

für $\tau > 0$

$$R_{ff}(\tau) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \{q_j(\tau) + \mathbf{1}_{(0,\varepsilon)}(\tau) c_j(\tau)\} + o(\varepsilon^{N+1})$$

mit

$$\begin{aligned} q_j(\tau) &= \int_0^\infty Q(u) \mu_j^*(Q^{(j)}(u + \tau))^* du, \\ c_j(\tau) &= \int_0^\infty Q^{(j)}(s + \tau) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^1 \left(u - 2\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^j R(u) du Q^*(s) ds \\ &\quad + (-1)^{j+1} \int_0^\infty Q(s) \int_{\frac{\tau}{\varepsilon}}^1 u^j R(u) du (Q^{(j)}(s + \tau))^* ds, \quad j = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

und speziell für die Kovarianzmatrix ($\tau = 0$)

$$R_{ff}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \{q_j + q_j^*\} + o(\varepsilon^{N+1})$$

mit

$$q_j = \int_0^\infty Q^{(j)}(u) \kappa_j Q^*(u) du, \quad j = 0, \dots, N.$$

Die Werte für $\tau < 0$ können aus der Beziehung $R_{ff}(\tau) = R_{ff}^*(-\tau)$ ermittelt werden.

Korollar 2.9

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8 gilt für jedes feste $\tau \geq \varepsilon$

$$R_{ff}(\tau) = \sum_{j=0}^N q_j(\tau) \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} + o(\varepsilon^{N+1}),$$

da in diesem Fall der Term $\mathbf{1}_{(0,\varepsilon)}(\tau) c_j(\tau)$ gleich Null ist.

Definition 2.10

Die Menge aller Funktionen aus \mathfrak{G}^N , deren ersten $N - 1$ Ableitungen an der Stelle 0 verschwinden, d.h. Nullmatrizen sind, wird mit \mathfrak{G}_0^N bezeichnet:

$$\mathfrak{G}_0^N := \{Q \in \mathfrak{G}^N : Q^{(k)}(0) = 0, k = 0, \dots, N - 1\}.$$

Korollar 2.11

Sei $Q \in \mathfrak{G}_0^N$. Dann gilt

$$f^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q^{(k)}(t-s)^\varepsilon f(s, \omega) ds, \quad k = 0, \dots, N$$

und damit für jedes feste $\tau > 0$

$$R_{f^{(k)} f^{(k)}}(\tau) = \sum_{j=0}^{N-k} \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} \int_0^\infty Q^{(k)}(u) \mu_j^*(Q^{(j+k)}(u+\tau))^* du + o(\varepsilon^{N-k+1}), \quad k = 0, \dots, N.$$

Für $R_{f^{(k)} f^{(k)}}(0)$ gilt analoges.

Beweis.

Die Ableitungen sind mit $Q \in \mathfrak{G}_0^N$ wieder Integralfunktionale der Art (2.1). Man erhält z.B. für die 1. Ableitung

$$\dot{f}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q'(t-s)^\varepsilon f(s, \omega) ds + Q(0)^\varepsilon f(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q'(t-s)^\varepsilon f(s, \omega) ds.$$

□

3 Stationäre Lösung

Sei A eine stabile Matrix, d.h. alle Eigenwerte haben negativen Realteil, und $g(t, \omega)$ ein stationärer f.s. stetiger Prozess. Dann hat das lineare System 1. Ordnung (1.1) die eindeutige stationäre Lösung

$$z(t, \omega) = \int_{-\infty}^t G(t-s)g(s, \omega) ds,$$

wobei $G(t) = e^{At}$ die Matrixexponentialfunktion von A ist (vgl. [1]).

Gesucht sind die Korrelationsfunktionen der stationären Lösung und der Ableitungen bis zur gewünschten Ordnung \bar{k}_z , wobei die Funktionen $f^{(k)}$ der rechten Seite nach (1.2) Integralfunktionale vom Typ (2.1) mit Kernfunktionen $Q^{(k)}$, $k = 0, \dots, \bar{k}_f$, sind.

Lemma 3.1

Ist $Q \in \mathfrak{G}_0^{\bar{k}_f}$, so ist die stationäre Lösung z ein Integralfunktional von ${}^\varepsilon f$ mit Kernfunktion

$$\hat{G}(t) = \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} \int_0^t G(t-u) P_k Q^{(k)}(u) du, \quad \text{d.h.}$$

$$z(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds.$$

Beweis.

Durch Integraltransformation erhält man

$$\begin{aligned} z(t, \omega) &= \int_{-\infty}^t G(t-s) g(s, \omega) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} \int_{-\infty}^t G(t-s) P_k \int_{-\infty}^s Q^{(k)}(s-u) {}^\varepsilon f(u, \omega) du ds \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s G(t-s) P_k Q^{(k)}(s-u) {}^\varepsilon f(u, \omega) du ds \\ &= \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} \int_{-\infty}^t \int_0^{t-u} G(t-u-v) P_k Q^{(k)}(v) {}^\varepsilon f(u, \omega) dv du \\ &= \int_{-\infty}^t \underbrace{\sum_{k=0}^{\bar{k}_f} \int_0^{t-s} G(t-s-u) P_k Q^{(k)}(u) du}_{\hat{G}(t-s)} {}^\varepsilon f(s, \omega) ds. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.2

Sei $Q \in \mathfrak{G}_0^{\bar{k}_f+l}$ für ein $l \geq 0$. Dann gilt $\hat{G} \in \mathfrak{G}_0^l$ und

$$\hat{G}^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{\bar{k}_f} \int_0^t G(t-u) P_i Q^{(i+k)}(u) du, \quad k = 0, \dots, l,$$

d.h. für die stationäre Lösung z ist Korollar 2.11 anwendbar.

Insbesondere gilt:

$$z^{(k)}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t \hat{G}^{(k)}(t-s) \varepsilon f(s, \omega) ds \quad \text{für } k = 0, \dots, l.$$

Beweis.

Wegen

$$\hat{G}'(t) = \sum_{i=0}^{\bar{k}_f} \left(\int_0^t G'(t-u) P_i Q^{(i)}(u) du + G(0) P_i Q^{(i)}(t) \right)$$

und durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \hat{G}'(t) &= \sum_{i=0}^{\bar{k}_f} \left(- [G(t-u) P_i Q^{(i)}(u)]_{u=0}^t + \int_0^t G(t-u) P_i Q^{(i+1)}(u) du + G(0) P_i Q^{(i)}(t) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\bar{k}_f} \int_0^t G(t-u) P_i Q^{(i+1)}(u) du \end{aligned}$$

erhält man mit $Q \in \mathfrak{G}_0^{\bar{k}_f+1}$ die Behauptung für $l = 1$, da $\hat{G} \in \mathfrak{G}^1$ und wegen $\hat{G}(0) = 0$ auch $\hat{G} \in \mathfrak{G}_0^1$. Für $l > 1$ zeigt man die Behauptung mit Induktion. \square

Bemerkung 3.3 Man verwendet eine Kernfunktion $Q \in \mathfrak{G}_0^{\bar{k}}$, $\bar{k} = \bar{k}_f + \bar{k}_z + N$, wenn die \bar{k}_z -te Ableitung der stationären Lösung z bis zur Ordnung N entwickelt werden soll und in die rechte Seite der Differentialgleichung Ableitungen der Ordnung \bar{k}_f eingehen.

Bei linearen Modellen diskreter bzw. diskretisierter Schwingungssysteme ist die 1. Ableitung der stationären Lösung von Interesse, die bereits die Beschleunigungskomponenten der Differentialgleichung 2. Ordnung enthält. Im inhomogenen Term kommen ebenfalls Ableitungen der Ordnung 2 vor. Für eine Approximation der Korrelationsfunktion durch die erste Näherung nach der oben angegebenen Methode ist $\bar{k} \geq 3$ zu wählen, für höhere Entwicklungen, die insbesondere bei Nichtlinearitäten in der Differentialgleichung eine Rolle spielen, entsprechend eine höhere Ordnung.

4 Glättung von Integralfunktionalen

Für praktische Anwendungen ist es notwendig, Funktionen $Q \in \mathfrak{G}_0^{\bar{k}}$ zu finden, so dass die entsprechenden Prozesse f (vgl. (2.1)) die bekannten Eigenschaften möglichst gut erfüllen. In Anwendungen wird für ein zufälliges Straßenprofil die Spektraldichte

$$S(\alpha) = \frac{\sigma^2}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad \gamma > 0$$

verwendet. Für die zugehörige Korrelationsfunktion berechnet man

$$R(t) = \sigma^2 e^{-\gamma|t|}.$$

Stellt man das Straßenprofil als Integralfunktional eines ε -korrelierten Prozesses dar, so führt die Kernfunktion $Q(t) = e^{-\gamma t}$ in erster Näherung nach Korollar 2.11 auf die zu erzielende Korrelationsfunktion (mit entsprechend gewählten Konstanten). Die Funktion Q liegt in \mathfrak{G}^∞ , aber für kein $k > 0$ in der Menge \mathfrak{G}_0^k , d.h. Ableitungen des Straßenprofils sind keine Integralfunktionale. Diese Tatsache erschwert die Berechnung der Korrelationsfunktionen der Ableitungen und auch der Lösung von Differentialgleichungen für Schwingungssysteme. Die Idee besteht nun darin, die Funktion Q so zu verändern, dass der Typ der Korrelationsfunktion erhalten bleibt, aber die Ableitungen Integralfunktionaldarstellung haben. Die zugrunde liegende Prozedur wird Glättung genannt.

Definition 4.1

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$. Eine Funktion ${}^0Q_\delta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- ${}^0Q_\delta$ ist $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar,
- ${}^0Q_\delta^{(k)}, {}^0Q_\delta^{(k+1)}$ existieren als stückweise stetige beschränkte Funktionen,
- $0 \leq {}^0Q_\delta(t) \leq 1$ für $0 \leq t < \delta$ und ${}^0Q_\delta(t) = 1$ für $t \geq \delta$,
- ${}^0Q_\delta^{(l)}(0) = 0$ für $l = 0, \dots, k-1$

wird Glättungsfunktion der Ordnung k genannt.

Die Konstruktion einer solchen Funktion wird im Abschnitt 4.2 ausgeführt.

Korollar 4.2

Ist ${}^0Q_\delta$ eine Glättungsfunktion der Ordnung k und $Q \in \mathfrak{G}^k$, so gilt:

$$Q_\delta(t) := {}^0Q_\delta(t)Q(t) \in \mathfrak{G}_0^k.$$

Beweis.

Die Funktionen

$$Q_\delta^{(l)}(t) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} {}^0Q_\delta^{(j)}(t) Q^{(l-j)}(t), \quad l = 0, \dots, k+1$$

unterscheiden sich nur auf dem endlichen Intervall $[0, \delta)$ von $Q^{(l)}$. Da die ${}^0Q_\delta^{(l)}$ beschränkt und stückweise stetig sind, sind die Produkte ${}^0Q_\delta^{(j)}(t)Q^{(l-j)}(t)$ aus $L_1 \cap L_2$. Die anderen Forderungen leiten sich direkt aus den Definitionen von \mathfrak{G}^k , \mathfrak{G}_0^k und 4.1 ab. \square

Die Struktur der Korrelationsfunktion eines Integralfunktionalen bei Glättung bleibt näherungsweise erhalten. Dieses Ergebnis ist Inhalt des folgenden Satzes (vgl. [3]).

Satz 4.3

Seien $Q \in \mathfrak{G}^0$, $({}^0Q_\delta)_{\delta>0}$ eine Familie von Glättungsfunktionen beliebiger Ordnung,

$$h_\delta(t, \omega) = \int_{-\infty}^t {}^0Q_\delta(t-s) Q(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds, \quad \delta > 0,$$

die Glättungen von

$$f(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q(t-s) {}^\varepsilon f(s, \omega) ds$$

und bezeichnen ${}^1R_{ff}(\tau)$ und ${}^1S_{ff}(\alpha)$ die führenden Terme der Entwicklungen der Korrelationsfunktion $R_{ff}(\tau) = \varepsilon {}^1R_{ff}(\tau) + o(\varepsilon)$ und der Spektraldichte $S_{ff}(\alpha) = \varepsilon {}^1S_{ff}(\alpha) + o(\varepsilon)$. Dann gilt:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} {}^1R_{h_\delta h_\delta}(\tau) = {}^1R_{ff}(\tau), \tau \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lim_{\delta \downarrow 0} {}^1S_{h_\delta h_\delta}(\alpha) = {}^1S_{ff}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}.$$

In diesem Zusammenhang sei noch auf folgenden Aspekt hingewiesen: Sei $S_{ff}(\alpha)$ die Spektraldichte zu $R_{ff}(\tau)$. Dann ist ${}^1S_{ff}(\alpha)$ gerade die Spektraldichte zu ${}^1R_{ff}(\tau)$.

4.1 Berechnung der Funktion \hat{G}

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten q_j (vgl. Satz 2.8) erweist sich bei geglätteten Erregungsfunktionen aufgrund der stückweisen Definition der Glättungsfunktion als recht aufwendig. An dieser Stelle wird für den Fall einer eindimensionalen Kernfunktion Q_δ die analytische Berechnung der Funktion \hat{G} angegeben und für die numerische Auswertung aufgearbeitet. Für die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten empfiehlt sich dann numerische Integration. Mit dem Ansatz

$$Q_\delta(t) := e^{-\gamma t} {}^0Q_\delta(t), \quad \gamma > 0$$

können die Komponenten

$$f_i(t, \omega) = \int_{-\infty}^t Q_\delta(t-s) {}^\varepsilon f_i(s, \omega) ds$$

als parallele Fahrspuren interpretiert werden, deren Unterschiede in den Eigenschaften allein durch die Komponenten des Vektors ${}^\varepsilon f$ modelliert werden. ${}^0Q_\delta(t)$ sei eine Glättungsfunktion der Ordnung $\bar{k} = \bar{k}_f + \bar{k}_z + N$.

Weiterhin wird angenommen, dass für die Systemmatrix A in (1.1) die Eigenwertzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ existiert mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Wir berechnen die Funktion \hat{G} mittels des entkoppelten Systems

$$\dot{y} = \Lambda y + \tilde{g}(t, \omega),$$

das durch die Transformation $z = Vy$ aus (1.1) hervorgeht und den inhomogenen Term

$$\tilde{g}(t, \omega) = V^{-1}g(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\bar{k}_f} V^{-1}P_k f^{(k)}(t, \omega)$$

besitzt. Die Korrelationsfunktion des Originalsystems wird unter Anwendung der entsprechenden Rücktransformation

$$R_{zz}(\tau) = VR_{yy}(\tau)V^* = \sum_{j=0}^N V y_{q_j}(\tau) V^* \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} + o(\varepsilon^{N+1})$$

ermittelt. Ziel ist die Berechnung der Funktionen

$$\hat{G}^{(k)}(t) = V \sum_{i=0}^{\bar{k}_f} \int_0^t e^{\Lambda(t-u)} Q_\delta^{(k+i)}(u) du V^{-1} P_i, \quad k = 0, \dots, \bar{k}_z + N,$$

d.h. es sind Integrale der Form

$${}^kF(t) = \int_0^t e^{\Lambda(t-u)} Q_\delta^{(k)}(u) du$$

zu betrachten für $k = 0, \dots, \bar{k}$. Definiert man

$${}^kF_1(t) := \int_0^t e^{-\Lambda u} Q_\delta^{(k)}(u) du \quad \text{und}$$

$${}^kF_2(t) := \int_\delta^t e^{\Lambda(t-u)} Q_\delta^{(k)}(u) du,$$

so gilt

$${}^kF(t) = \begin{cases} e^{\Lambda t} {}^kF_1(t) & t \leq \delta \\ e^{\Lambda t} {}^kF_1(\delta) + {}^kF_2(t) & t > \delta. \end{cases}$$

Für $-\gamma \neq \lambda_i$ für alle reellen Eigenwerte λ_i aus Λ läßt sich kF_2 explizit berechnen,

$${}^kF_2(t) = (-\gamma)^k e^{-\gamma t} (\Lambda + \gamma I)^{-1} (e^{(\Lambda + \gamma I)(t-\delta)} - I).$$

Durch wiederholte partielle Integration ermittelt man

$$\begin{aligned} {}^kF_1(t) &= \int_0^t e^{-\Lambda u} Q_\delta^{(k)}(u) du = e^{-\Lambda t} Q_\delta^{(k-1)}(t) + \Lambda \int_0^t e^{-\Lambda u} Q_\delta^{(k-1)}(u) du \\ &= e^{-\Lambda t} \sum_{i=1}^k \Lambda^{i-1} Q_\delta^{(k-i)}(t) + \Lambda^k {}^0F_1(t). \end{aligned}$$

Für $Q_\delta(t) = e^{-\gamma t} {}^0Q_\delta(t)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 {}^0F_1(t) &= \int_0^t e^{-(\Lambda+\gamma I)u} {}^0Q_\delta(u) du \\
 &= (\Lambda + \gamma I)^{-1} \left(-e^{-(\Lambda+\gamma I)t} {}^0Q_\delta(t) + \int_0^t e^{-(\Lambda+\gamma I)u} {}^0Q'_\delta(u) du \right) \\
 &= - \sum_{i=0}^{2\bar{k}-1} (\Lambda + \gamma I)^{-i-1} \left[e^{-(\Lambda+\gamma I)u} {}^0Q_\delta^{(i)}(u) \right]_{u=0}^t \\
 &= -e^{-(\Lambda+\gamma I)t} \sum_{i=0}^{2\bar{k}-1} (\Lambda + \gamma I)^{-i-1} {}^0Q_\delta^{(i)}(t) + \sum_{i=\bar{k}}^{2\bar{k}-1} (\Lambda + \gamma I)^{-i-1} {}^0Q_\delta^{(i)}(0),
 \end{aligned}$$

wenn zusätzlich noch vorausgesetzt wurde, dass Bedingung 2 aus Definition 4.1 auch bis zur $(2\bar{k}-1)$ -ten Ableitung der Glättungsfunktion ${}^0Q_\delta$ gilt. Das ist jedoch bei einer Glättungsfunktion nach Abschnitt 4.2 immer erfüllt.

Für die numerische Umsetzung ist es zu empfehlen, die von der Zeit t abhängigen Komponenten besonders zu beachten.

Für $t > \delta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 {}^kF(t) &= e^{\Lambda t} {}^kF_1(\delta) + {}^kF_2(t) \\
 &= e^{\Lambda(t-\delta)} [K(k, \delta) + e^{\Lambda\delta} H(k) - e^{-\gamma\delta} (L(k, \delta) - M(k))] - e^{-\gamma t} M(k),
 \end{aligned}$$

wenn man

$$\begin{aligned}
 K(k, t) &:= \sum_{i=1}^k \Lambda^{i-1} Q_\delta^{(k-i)}(t), \\
 L(k, t) &:= \Lambda^k \sum_{i=0}^{2\bar{k}-1} (\Lambda + \gamma I)^{-i-1} {}^0Q_\delta^{(i)}(t), \\
 H(k) &:= \Lambda^k \sum_{i=\bar{k}}^{2\bar{k}-1} (\Lambda + \gamma I)^{-i-1} {}^0Q_\delta^{(i)}(0), \\
 M(k) &:= (-\gamma)^k (\Lambda + \gamma I)^{-1}
 \end{aligned}$$

setzt und die Vertauschbarkeit der Multiplikationsreihenfolge von $(\Lambda + \gamma I)^{-1}$ und $e^{\Lambda t}$ wegen $(\Lambda + \gamma I)^{-1} e^{\Lambda t} = (\Lambda + \gamma I)^{-1} e^{(\Lambda+\gamma I)t} e^{-\gamma t}$ berücksichtigt. Die Fälle $t \leq \delta$ führen mit Hilfe der oben eingeführten Größen auf

$${}^kF(t) = e^{\Lambda t} {}^kF_1(t) = K(k, t) - e^{-\gamma t} L(k, t) + e^{\Lambda t} H(k).$$

Die Stetigkeit von ${}^kF(t)$ für $t = \delta$ wird aus

$$\lim_{t \uparrow \delta} {}^kF(t) = \lim_{t \downarrow \delta} {}^kF(t)$$

klar.

Bemerkung 4.4 Die Funktionen ${}^kF(t)$ haben wie Λ Diagonal- bzw. im reellifizierten Fall (vgl. [2]) Blockdiagonalgestalt.

Für den Fall eines Eigenwertes $\lambda_j = -\gamma$ lauten die entsprechenden Einträge auf der Diagonalen:

$$\begin{aligned} ({}^kF_2(t))_{jj} &= (-\gamma)^k \int_{\delta}^t e^{\lambda_j(t-u)} e^{-\gamma u} du = (-\gamma)^k e^{-\gamma t} (t - \delta), \\ ({}^kF_1(t))_{jj} &= \int_0^t e^{-\lambda_j u} Q_{\delta}^{(k)}(u) du = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_0^t e^{\gamma u} {}^0Q_{\delta}^{(j)}(u) Q^{(k-j)}(u) du \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\gamma)^{k-j} \int_0^t {}^0Q_{\delta}^{(j)}(u) du = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\gamma)^{k-j} {}^0Q_{\delta}^{(j-1)}(t) \end{aligned}$$

mit

$${}^0Q_{\delta}^{(-1)}(t) := \int_0^t {}^0Q_{\delta}(u) du,$$

woraus folgt

$${}^kF_{jj}(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-\gamma)^{k-j} {}^0Q_{\delta}^{(j-1)}(t) & t \leq \delta \\ e^{-\gamma t} (-\gamma)^k ({}^0Q_{\delta}^{(-1)}(\delta) + t - \delta) & t > \delta. \end{cases}$$

4.2 Konstruktion einer Glättungsfunktion

Gesucht ist eine Glättungsfunktion ${}^0Q_{\delta}$ der Ordnung k (vgl. Definition 4.1). Es bietet sich eine polynomiale Funktion

$${}^0Q_{\delta}(t) = \begin{cases} a_0(\frac{t}{\delta})^k + a_1(\frac{t}{\delta})^{k+1} + \dots + a_m(\frac{t}{\delta})^{k+m} & 0 \leq t \leq \delta \\ 1 & t > \delta \end{cases}$$

an, wobei die Unbekannten $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen sind, dass die Bedingungen aus Definition 4.1 erfüllt sind. Durch den gewählten Ansatz sind die Bedingungen 2 bis 4 und die stückweise Differenzierbarkeit von vorn herein erfüllt. Aus den Stetigkeitsforderungen der ersten $(k-1)$ Ableitungen im Punkt $t = \delta$ erhält man

$$\begin{aligned} {}^0Q_{\delta}(\delta) &= 1 : 1 = a_0 + a_1 + \dots + a_m \\ {}^0Q'_{\delta}(\delta) &= 0 : 0 = a_0 k + a_1(k+1) + \dots + a_m(k+m) \\ {}^0Q_{\delta}^{(2)}(\delta) &= 0 : 0 = a_0 \binom{k}{2} + a_1 \binom{k+1}{2} + \dots + a_m \binom{k+m}{2} \\ &\vdots \\ {}^0Q_{\delta}^{(k-1)}(\delta) &= 0 : 0 = a_0 \binom{k}{k-1} + a_1 \binom{k+1}{k-1} + \dots + a_m \binom{k+m}{k-1}. \end{aligned}$$

Es entstehen k lineare Gleichungen für $m + 1$ unbekannte Koeffizienten. Um dieses lineare Gleichungssystem eindeutig lösen zu können, wird $m = k - 1$ gesetzt. Das lineare Gleichungssystem kann in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{k}{1} & \binom{k+1}{1} & \cdots & \binom{2k-1}{1} \\ \binom{k}{2} & \binom{k+1}{2} & \cdots & \binom{2k-1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{k}{k-1} & \binom{k+1}{k-1} & \cdots & \binom{2k-1}{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden mit den Elementen

$$H_{ij} = \binom{k+j-1}{i-1}$$

der Systemmatrix H oder als

$$\sum_{j=1}^k \binom{k+j-1}{i-1} a_{j-1} = \delta_{i1} \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Geht man von der Darstellung

$${}^0Q_\delta(t) = \sum_{j=1}^k a_{j-1} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k+j-1}$$

aus, so ergibt sich für die Ableitungen

$${}^0Q_\delta^{(i)}(t) = \frac{i!}{\delta^i} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j-1} \binom{k+j-1}{i} \left(\frac{t}{\delta}\right)^{k+j-1-i}, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Natürlicherweise ergibt sich hieraus

$${}^0Q_\delta^{(i)}(\delta) = \frac{i!}{\delta^i} \sum_{j=0}^{k-1} a_{j-1} \binom{k+j-1}{i} = \delta_{i0}, \quad i = 0, \dots, k-1,$$

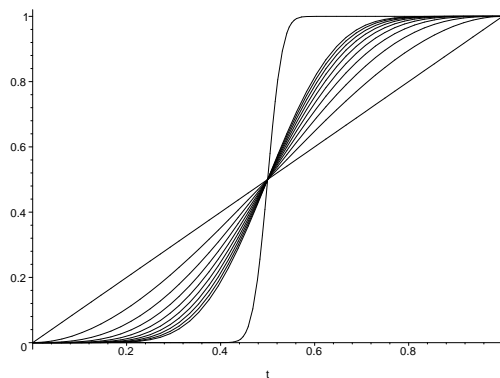
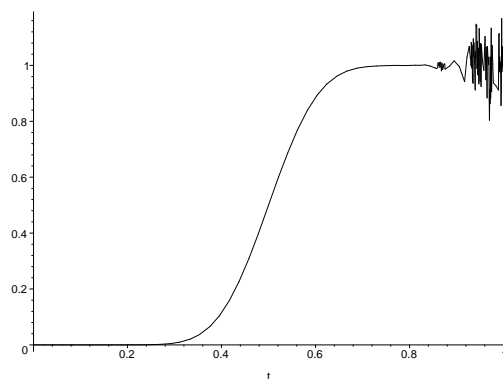
da dies die Bestimmungsgleichungen für diese polynomiale Glättungsfunktion sind.

Die Koeffizienten a_0, \dots, a_{k-1} sind für $k = 1, \dots, 9$ als Spalten in der Tabelle 4.1 angegeben und die dazugehörigen Glättungspolynome $a_0 t^k + \dots + a_{k-1} t^{2k-1}$ in Abb. 4.1 für $\delta = 1$ graphisch dargestellt. Diese Polynome nähern sich für wachsende k einer Sprungfunktion mit Sprung bei 0.5. In Abbildung 4.3 ist die Kernfunktion $Q_\delta(t) = {}^0Q_\delta(t) e^{-\gamma t}$ für $k = 5$ und die Ableitungen der Ordnungen 1 bis 5 gezeigt.

Bei der numerischen Auswertung der Polynome wurde das Horner-Schema verwendet, was in Anbetracht der Polynomkoeffizienten (siehe Tabelle 4.1) zu numerischen Schwierigkeiten führt. Bei der Berechnung der Ableitungen der Kernfunktion spitzt sich diese Problematik weiter zu. Numerische Probleme sind in Abbildung 4.2 dargestellt, wo die Rechengenauigkeit 15 Stellen beträgt und das Polynom zu $k = 18$ gezeichnet werden sollte. Zur numerischen Auswertung ist die Methode mit Glättungspolynom wohl nur für kleine Werte von k geeignet.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_0	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310
a_1		-2	-15	-84	-420	-1980	-9009	-40040	-175032
.			6	70	540	3465	20020	108108	556920
.				-20	-315	-3080	-24024	-163800	-1021020
.					70	1386	16380	150150	1178100
.						-252	-6006	-83160	-875160
.							924	25740	408408
.								-3432	-109395
a_{k-1}									12870

Tabelle 4.1: Koeffizienten der Glättungspolynome

Abbildung 4.1: Glättungspolynome zu $k = 1, \dots, 10, 200$ Abbildung 4.2: Glättungspolynom zu $k = 18$ bei Rechengenauigkeit von 15 Stellen

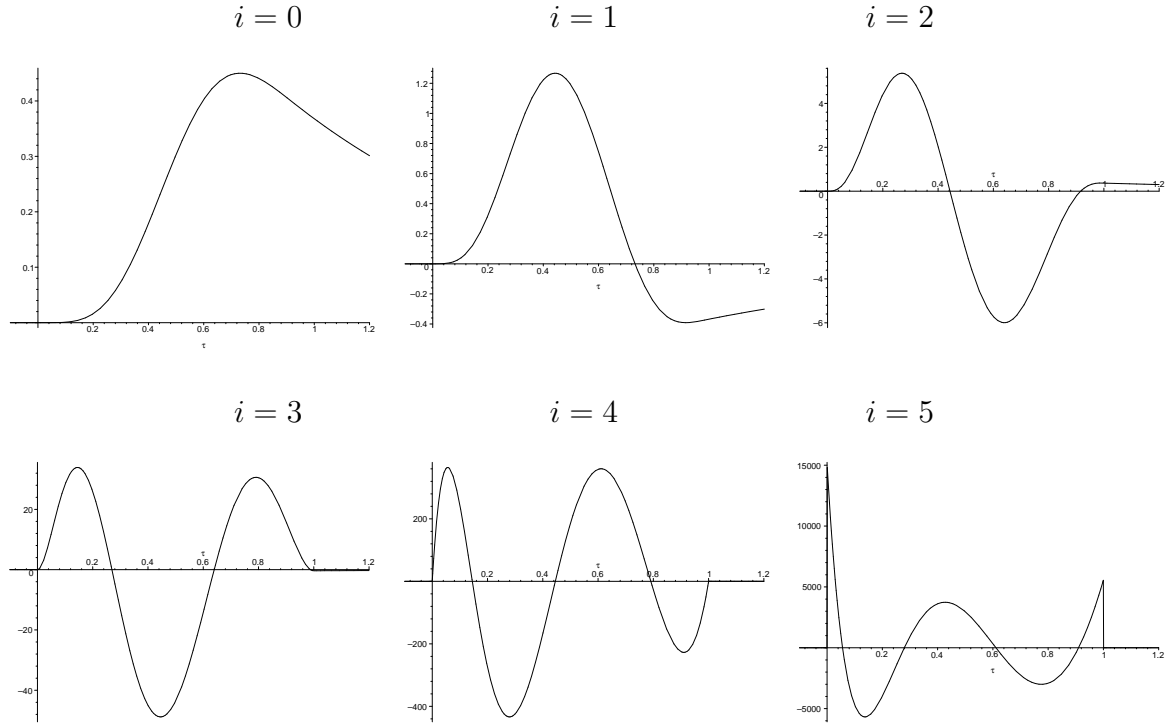


Abbildung 4.3: Kernfunktion $Q_\delta^{(i)}$ zu $k = 5$, $\delta = 1$, $\gamma = 1$

5 Ein Beispiel

Das einfachste Modell eines stochastisch erregten Oszillators ist der in Abbildung 5.1 gezeigte Einmassenschwinger, der ein einfaches Fahrzeugmodell darstellt. Ein Fahrzeug mit einer Masse m und einem Fahrwerk mit Dämpfungsparameter c und Federkraftkonstante k bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit über eine zufällige Straßenoberfläche f . Die Bewegungsgleichung für die Auslenkung der Masse $m\ddot{p} + c(\dot{p} - \dot{f}) + k(p - f) = 0$ führt zur Bewegungsgleichung für die Relativbewegung x

$$\ddot{x} + 2\rho\theta_0\dot{x} + \theta_0^2x = -\ddot{f},$$

wenn $\theta_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems und $\rho = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ der Dämpfungsgrad ist. Wir betrachten hier den Fall eines schwach gedämpften Systems, d.h. $\rho < 1$.

Das Interesse gilt den Korrelationsfunktionen von x , \dot{x} und \ddot{x} , wenn die zufällige Straßenoberfläche f als Integralfunktional eines stationären ε -korrelierten Prozesses modelliert wird. Wir betrachten dazu die Entwicklungen bis $N = 2$ und wählen als Kernfunktion von f die Funktion $Q(t) = e^{-\gamma t} {}^0Q_\delta(t)$ mit ${}^0Q_\delta(t)$ als Glättungspolynom der Ordnung $\bar{k} = 5$. Für den eindimensionalen Fall vereinfachen sich die Entwicklungen nach Satz 2.8

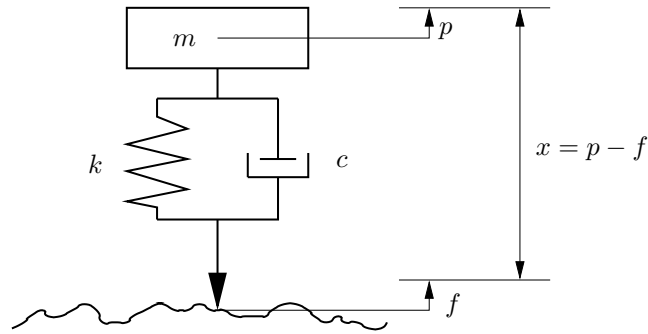


Abbildung 5.1: Einmassenschwinger

wie in [6] angegeben zu

$$R_{ff}(\tau) = \sum_{j=0}^{[N/2]} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j)!} q_{2j}(\tau) \mu_{2j} + \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(\tau) \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(\tau) c_j(\tau) + \rho_{N+1}(\varepsilon, \tau)$$

mit den nur noch von der Kernfunktion Q abhängigen Koeffizienten

$$q_j(\tau) = \int_0^\infty Q(s) Q^{(j)}(s + |\tau|) ds$$

und den Koeffizienten des Korrekturtermes

$$c_j(\tau) = \int_{\frac{|\tau|}{\varepsilon}}^1 \left(\left(u - 2 \frac{|\tau|}{\varepsilon} \right)^j - (-u)^j \right) R(u) du.$$

Für $\tau = 0$ gilt speziell

$$R_{ff}(0) = \sum_{j=0}^N \frac{\varepsilon^{j+1}}{j!} q_j(0) \nu_j + o(\varepsilon^{N+1}).$$

Wählt man für $(\varepsilon^f)_{\varepsilon>0}$ die Familie der Bachelier-Wiener-Prozesse, d.h. stationäre ε -korrelierte Prozesse mit Korrelationsfunktion

$$R(u) = (1 - |u|)^+$$

des 1-korrelierten Prozesses (vgl. Annahme 2.3), so ermittelt man

$$\begin{aligned} \nu_j &= \frac{2}{(j+1)(j+2)}, \quad \mu_{2j} = \nu_{2j}, \quad j = 0, 1, \dots, \\ c_j(\tau) &= \frac{2(-1)^{j+1}(|\tau|/\varepsilon - 1)(|\tau|/\varepsilon)^{j+1}}{j+1} + \frac{(1 - 2|\tau|/\varepsilon)^{j+1} - (-1)^j}{(j+1)(j+2)} \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Zur numerischen Berechnung der Korrelationsfunktionen wurden die q_j mittels numerischer Integration bestimmt. Die Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen die Approximationen für $N = 0, 1, 2$ und ohne Korrekturterme c_j für $N = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = 1$ und verschiedene ε . Als Parameter des Schwingungssystems wurden $\rho = 0.5$ und $\theta_0 = 3$ verwendet.

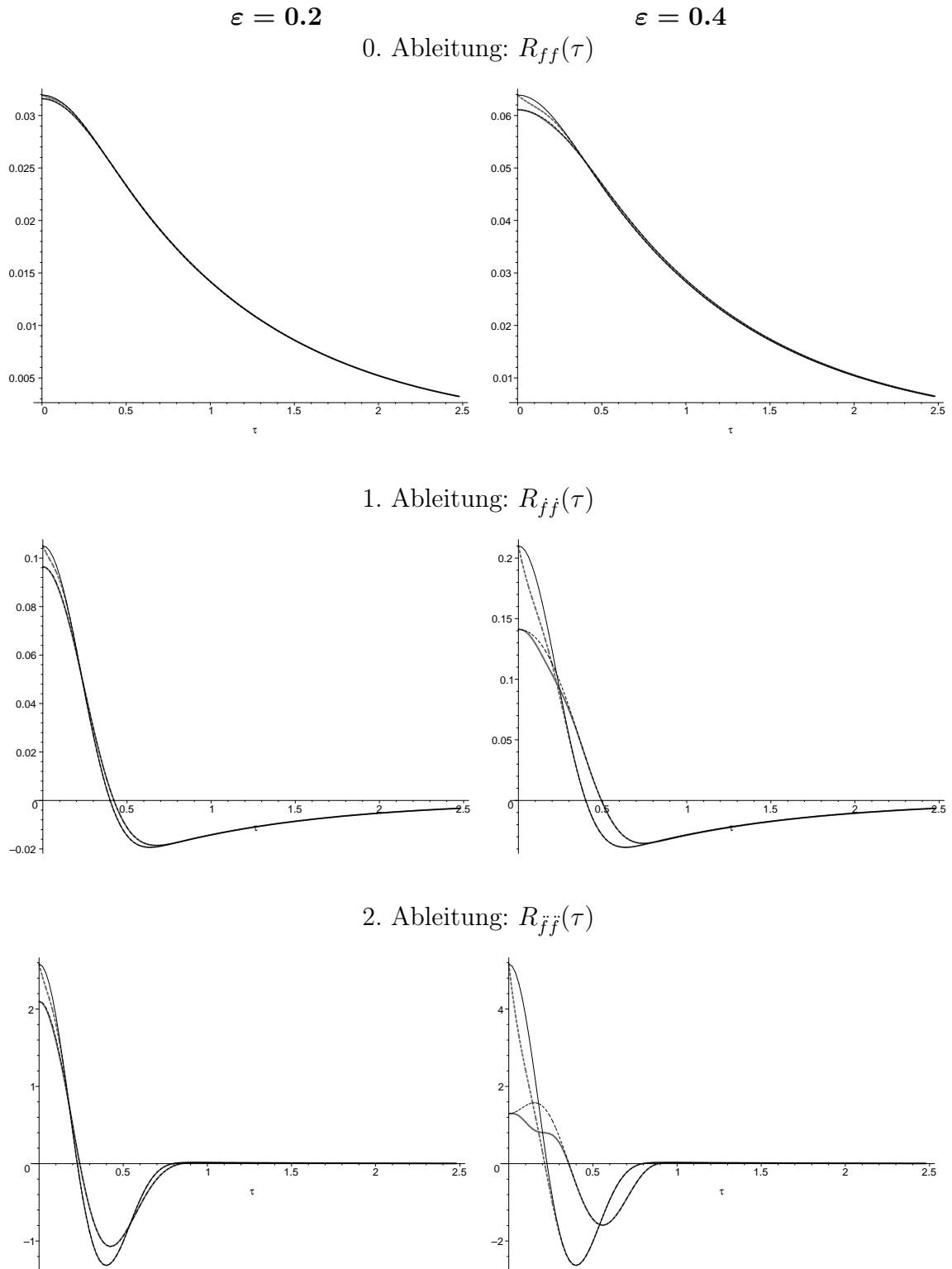


Abbildung 5.2: Korrelationsfunktionen der Erregung f für $N = 0, 1, 2$ (schwarz, grau gestrichelt, grau) und ohne Korrekturterme für $N = 2$ (schwarz gestrichelt)

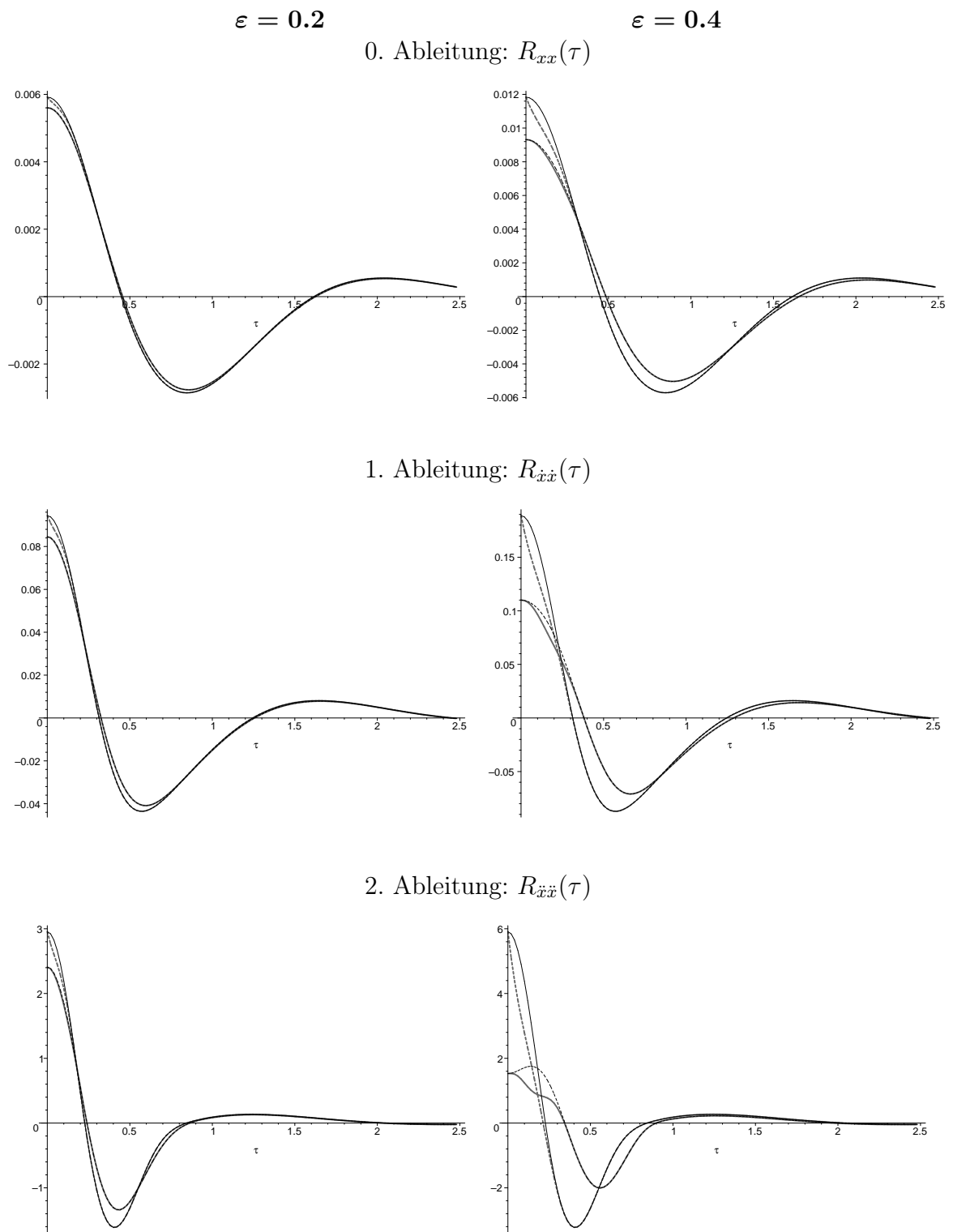


Abbildung 5.3: Korrelationsfunktionen der Lösung x für $N = 0, 1, 2$ (schwarz, grau gestrichelt, grau) und ohne Korrekturterme für $N = 2$ (schwarz gestrichelt)

Literatur

- [1] H. Bunke. *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern*. Akademie-Verlag, Berlin, 1972.
- [2] J. Gruner. Diskrete Schwingungssysteme mit stochastischer Fremderregung, *Dissertation*, TU Chemnitz, 1999.
- [3] J. vom Scheidt. *Stochastic Equations of Mathematical Physics*. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- [4] J. vom Scheidt, B. Fellenberg, U. Wöhr. *Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [5] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic expansion of integral functionals of vector valued ε -correlated processes. *Preprint 1999-3*, TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 1999.
- [6] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Remarks on Randomly Excited Oscillators. *ZAMM*, **82**, 847-859, 2002.
- [7] J. vom Scheidt, H.-J. Starkloff, R. Wunderlich. Asymptotic Expansions of Integral Functionals of Weakly Correlated Random Processes. *Journal for Analysis and its Applications*, **19**, No. 1, 255-268, 2000.
- [8] H. Weiß. Niedrigdimensionale Approximationen für lineare Systeme zufälliger Differentialgleichungen. *Diplomarbeit*, TU Chemnitz, 1999.
- [9] R. Wunderlich. Systems of random differential equations and model reduction. *Habilitationsschrift*, TU Chemnitz, 1999.